ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 1: Um espaço vetorial consiste do seguinte:

(1) Um conjunto $V \neq \emptyset$ de objetos, denominados vetores;

(2) Um corpo de escalares (neste curso os escalares serão tomados apenas em $\mathbb{R}$)

(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$, um elemento $u \oplus v \in V$.

Esta operação tem as seguintes propriedades:

(A_1) comutatividade: $u \oplus v = v \oplus u$; $\forall\, u, v \in V$

(A_2) associatividade: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$; $\forall\, u, v, w \in V$

(A_3) elemento neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u \oplus 0_V = u$; $\forall\, u \in V$

(A_4) elemento simétrico: Para todo elemento $u \in V$, existe o elemento $-u \in V$ tal que $u \oplus (-u) = 0_V$; $\forall\, u \in V$

(4) Uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada $\alpha \in \mathbb{R}$, um elemento $\alpha \odot u \in V$. Esta operação tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)\odot u = \alpha\odot(\beta\odot u)$, $\forall u \in V$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(M_2) Distributividade para a adição de elementos:

$$\alpha\odot(u\oplus v) = \alpha\odot u \oplus \alpha\odot v, \quad \forall u, v \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(M_3) Distributividade para a multiplicação por escalar:

$$(\alpha+\beta)\odot u = \alpha\odot u \oplus \beta\odot u \ ; \quad \forall u \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(M_4) $\quad 1\odot u = u \ ; \quad \forall u \in V$

Exemplos:

① $\mathbb{R}$ com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais é um espaço vetorial real;

② $\mathbb{C}$ com as operações usuais é um espaço vetorial real;

③ $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações definidas por:

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$
$$\lambda\odot(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

é um espaço vetorial real.

(4) $\mathbb{C}^n = \{ (z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C} \}$ com as operações definidas por:

$$(z_1, \dots, z_n) \oplus (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

$$\lambda \odot (z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$$

é um espaço vetorial real.

(5) $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ é função$\}$ com as operações definidas por:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$(\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

(6) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual que n, com coeficientes reais, é um espaço vetorial real, quando munido da soma usual de polinômios e da multiplicação usual de um número real por um polinômio.

Teorema 1 (Unicidade do elemento neutro)

Seja V um espaço vetorial real. Então, existe um único elemento neutro da operação de adição $0_V \in V$.

Demonstração: Como V é espaço vetorial, o axioma (A_3) nos garante que existe pelo menos um elemento neutro $0_V \in V$. Vejamos que ele é o único. Suponha que exista outro elemento neutro $0_1 \in V$. Logo,

$$0_V = 0_V + 0_1 = 0_1 + 0_V = 0_1$$

Isso prova a unicidade do elemento neutro.

Teorema 2 (Unicidade do elemento simétrico) Seja V um espaço vetorial real. Então todo elemento $u \in V$ possui um único elemento simétrico.

Demonstração: O axioma (A_4) afirma que todo $u \in V$ possui pelo menos um elemento simétrico $-u \in V$. Vejamos que ele é o único simétrico de u. Suponha que exista outro elemento simétrico de u, digamos u_1. Logo:

$$u \oplus (-u) = 0_V$$
$$u \oplus u_1 = 0_V$$

$$-u = 0_V \oplus (-u) = (u \oplus u_1) \oplus (-u) = (u_1 \oplus u) \oplus (-u) = u_1 \oplus (u \oplus (-u))$$

$= u_1 \oplus 0_V = u_1$. Logo o elemento simétrico é único. 5

2ª AULA DO CURSO DE VERÃO IME - USP

SUBESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2: Seja V um espaço vetorial real. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é ele mesmo um espaço vetorial real, com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Exemplos:

① $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - ax = 0 ; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

② $S = \{ w \in \mathbb{R}^3 : w = a(1,-1,1) + b(2,1,-1) ; a,b \in \mathbb{R} \}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3 (Subespaço Vetorial): Um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial se, e somente se, para quaisquer elementos $u, v \in U$, e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $u \oplus v \in U$ e $\alpha \odot u \in U$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se U é subespaço vetorial de V é imediato que $u \oplus v \in U$ e $\alpha \odot u \in U$, p/ quaisquer $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Como $U \subset V$, então os axiomas (A_1) e (A_2) são automaticamente satisfeitos, pois são válidos para todos os elementos de V. De modo análogo, os axiomas (M_1), (M_2); (M_3) e (M_4) são satisfeitos automaticamente.

Finalmente, devemos provar somente os axiomas:

(A_3) Elemento neutro: Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda \odot u \in U$. Em particular se $\lambda = 0$, temos,

$U \ni 0 \odot u = 0_V$. Logo U possui elemento neutro.

(A_4) Elemento simétrico: Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda \odot u \in U$. Em particular se $\lambda = -1$, obtemos

$U \ni -1 \odot u = 1 \odot (-u) = -u$. Logo todo elemento de u possui um simétrico.

Então U é subespaço vetorial de V.

<u>Exemplos</u>:

(1) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y - 2x = 1\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

(2) $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0$ e $p'(1) = 0\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

③ Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Então o conjunto solução deste sistema é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(-1,-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

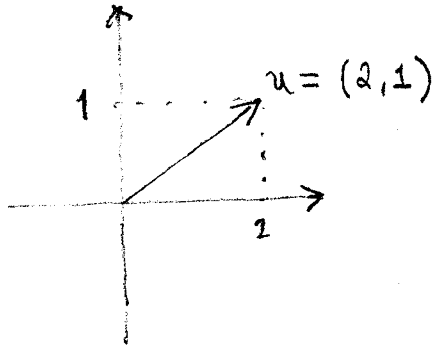
é o conjunto solução do sistema linear.

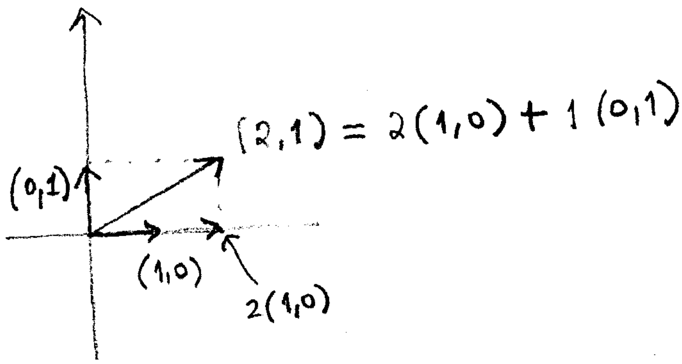
* Aqui encerra o conteúdo da 1ª lista.

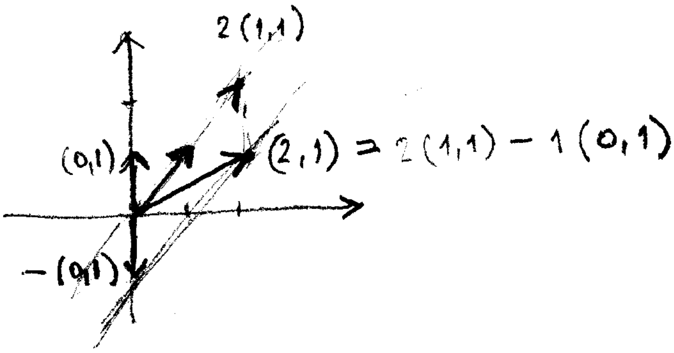
COMBINAÇÃO LINEAR E SUBESPAÇO GERADO

motivação geométrica

Em $\mathbb{R}^2$:







Veja que o vetor

$$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$
$$(2,1) = 2(1,1) - 1(0,1)$$

Essas duas maneiras, mostram que o vetor $(2,1)$ é escrito como soma entre dois outros vetores de $\mathbb{R}^2$. Em termos matemáticos dizemos que o vetor $(2,1)$ é uma combinação linear dos vetores $\{(1,0); (0,1)\}$ e também dos vetores $\{(1,1); (0,1)\}$.

<u>Definição 3</u>: Seja V um espaço vetorial real. Dizemos que o elemento $u \in V$ é uma <u>combinação linear</u> dos elementos $v_1, \dots, v_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Veja que $(2,1)$ é combinação linear tanto dos vetores $\{(1,0);(0,1)\}$ quanto dos vetores $\{(1,1),(0,1)\}$.

<u>Exemplo</u>: Expressar o vetor $v = (2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos seguintes vetores:

a) $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

b) $\{(1,1,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

c) $\{(3,2,1);(0,2,0);(0,1,1)\}$

$$(2,1,-1) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$$

$$\alpha_1 = 2; \quad \alpha_2 = 1; \quad \alpha_3 = -1$$

$$(2,1,-1) = \overset{2}{\alpha_1}(1,1,0) + \overset{-1}{\alpha_2}(0,1,0) + \overset{-1}{\alpha_3}(0,0,1)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

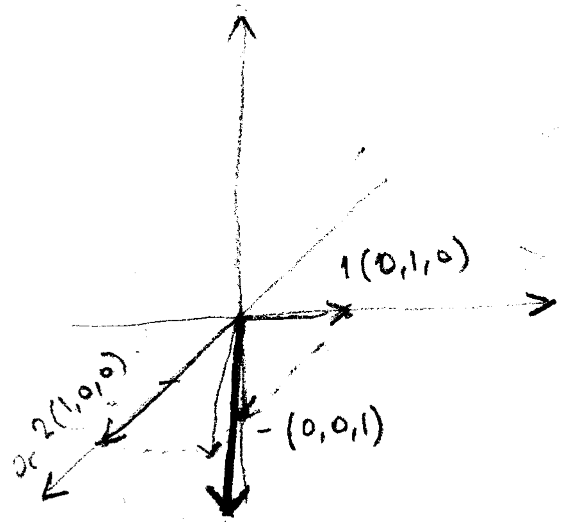
$$\boxed{\alpha_2 = -1}$$

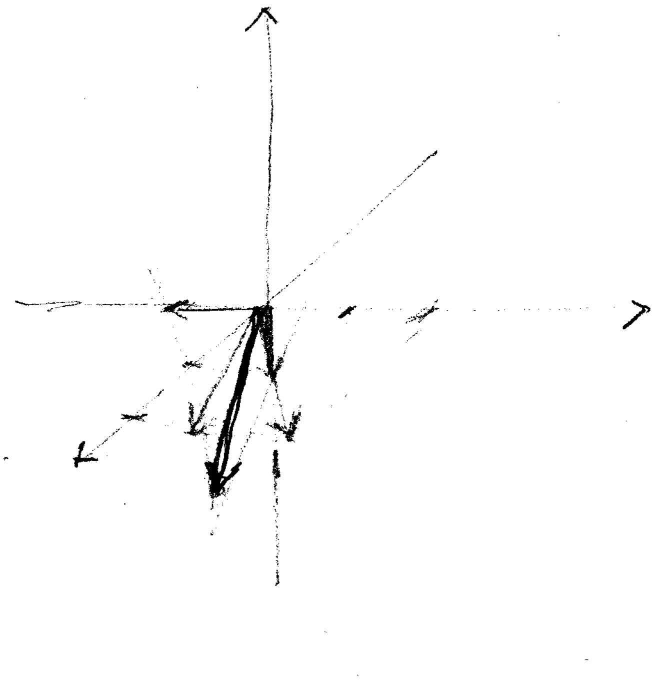
b

$$(2,1,-1) = \alpha_1 (3,2,1) + \alpha_2 (0,2,0) + \alpha_3 (0,1,1)$$
$$= (3\alpha_1 , 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 , \alpha_1 + \alpha_3)$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 2/3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \Rightarrow 2(2/3) + 2\alpha_2 - 5/3 = 1 \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 2/3} \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -1 \Rightarrow \alpha_3 = -1 - 2/3 = -3/3 - 2/3 = -5/3 \end{cases}$$

Interpretação geométrica :





<u>Definição 4</u>: Sejam V um espaço vetorial real e S um conjunto finito de elementos de V, isto é, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. O subconjunto U construído a partir dos elementos de S da seguinte forma:

$$U = \left\{ u \in V \mid u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço vetorial de V, que iremos denotar por:

$$U = [v_1, \dots, v_n] \quad \text{ou por} \quad U = [S];$$

denominado <u>subespaço gerado</u> pelos elementos de **S**.

Dizemos que S é um conjunto gerador do subespaço U.

<u>Exemplo</u>:

1. $(2,1) \in [(1,0); (0,1)]$

   $(2,1) \in [(1,1); (0,1)]$

   $(2,1) \notin [(1,0)]$

   $(2,1,-1) \in [(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)]$

   $(2,1,-1) \in [(1,1,0); (0,1,0); (0,0,1)]$

   $(2,1,-1) \notin [(1,1,0); (0,1,0)]$

(2) Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Dados os elementos

$$p_1(x) = x^3 - 1$$
$$p_2(x) = x^2 + x - 1$$
$$p_3(x) = x + 2.$$

Existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_1(x) = \alpha\, p_2(x) + \beta\, p_3(x) \ ?$$

$$x^3 - 1 = \alpha\,(x^2 + x - 1) + \beta\,(x + 2)$$
$$= \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + (2\beta - \alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta - \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \beta = -1/2 \end{matrix}$$

Logo $p_1(x) \notin [p_2(x) ; p_3(x)]$.

(3) Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ e os elementos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Será que $B \in [A, C]$?

Definição 5: Dizemos que um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito $S \subset V$ de maneira que $V = [S]$.

Exemplos:

① $W = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \ ; \ A = A^t \}$

1º W é gerado pelas matrizes $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

2º $M_2(\mathbb{R}) \neq \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$

② Verificar que $M_2(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

* Será exercício.

(*) Precisa ensinar escalonar matrizes e resolver sistemas lineares por escalonamento.